ВЫХОДИТ РАЗ В ДВЕ НЕДЕЛИ

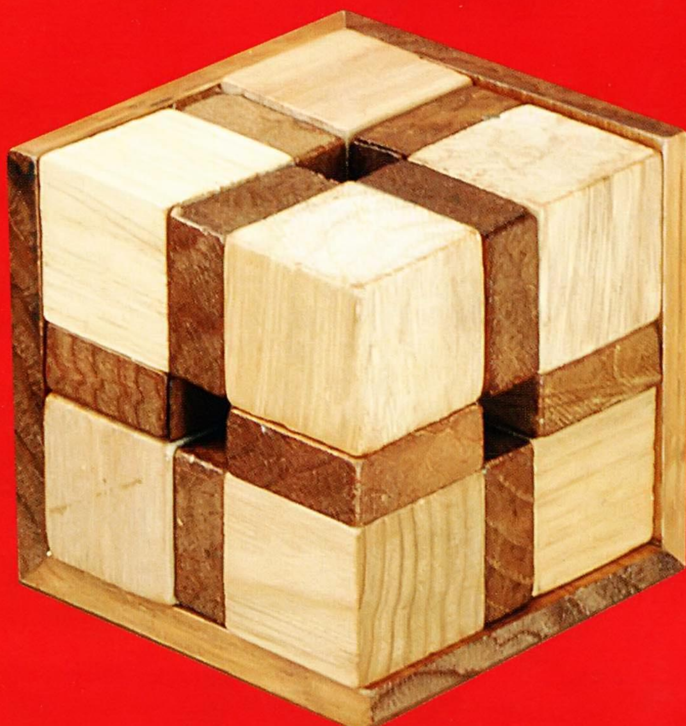
Рекомендуемая розничная цена: 279 руб.
Розничная цена: 49,90 грн, 990 тенге

Занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

27

Дьявольский куб



ISSN 2225-1782
00027
9 772225 178772

DeAGOSTINI

занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

В этом выпуске:

Математическая вселенная

Диофантовы уравнения и Ферма Общий алгоритм решения диофантовых уравнений до сих пор не найден. В знаменитом списке из 23 проблем, который представил Давид Гильберт на Международном конгрессе математиков в 1900 году, эта задача указана под номером 10. Решение уравнений такого типа интересно не только с чисто математической точки зрения: явления, описываемые квантовой механикой, имеют дискретную природу, поэтому часто требуют решения уравнений в целых числах.

Блистательные умы

Гениальный математик-любитель Ферма может по праву считаться создателем теории чисел: именно в этой области он получил множество важнейших результатов, хоть и не привел доказательств для большинства из них. Также он сформулировал основы аналитической геометрии и расширил ее для трехмерных пространств, не ограничиваясь геометрией на плоскости. Таинственный метод Ферма по-прежнему дает поводы для различных спекуляций, но, похоже, он так никогда и не будет найден.

Математика на каждый день

«Объемные многоугольники» Природа изобилует примерами самопроизвольного формирования многогранников: например, молекулы силикатов выстраиваются в форме тетраэдров и октаэдров. Форму правильных многоугольников имеют и пчелиные соты — благодаря этому в них сохраняется максимальное количество меда при минимальных расходах воска. Аденовирусы имеют форму икосаэдров, клетки эпителия — форму кубов и призм.

Математические задачки

Лучшее от Сэма Лойда Выдаем замуж девушек, съевших по огромному торту; играем в самую справедливую игру на пляже (не что-нибудь, а сигара с позолоченным кольцом в качестве приза!); считаем количество слепых змей, окруживших корабль. Ну а в качестве награды за решенные головоломки можно посмотреться в зеркало и изобразить из себя всевидящего оракула.

Головоломки

Дьявольский куб — увлекательная трехмерная головоломка из восьми частей, которую можно сравнить с кубом Конвея, кубиками сома и другими головоломками с поликубами. Цель всех этих головоломок одинакова — совместить части так, чтобы восстановить исходное расположение. Элементы головоломки нужно всего лишь приложить гранями друг к другу. По классификации Джерри Слокума дьявольский куб относится к разборным головоломкам.

«ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ»
Издание выходит раз в две недели
Выпуск № 27, 2013
РОССИЯ

ИЗДАТЕЛЬ, УЧРЕДИТЕЛЬ, РЕДАКЦИЯ:
ООО «Де Агостини», Россия
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 105 066, г. Москва,
ул. Александра Лукьянова, д.3, стр.1
Письма читателей по данному адресу не принимаются.

ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Николаос Скилакис
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: Анастасия Жаркова
ФИНАНСОВЫЙ ДИРЕКТОР: Наталия Василенко
КОММЕРЧЕСКИЙ ДИРЕКТОР: Александр Якутов
МЕНЕДЖЕР ПО МАРКЕТИНГУ: Михаил Ткачук
МЛАДШИЙ МЕНЕДЖЕР ПО ПРОДУКТУ:
Любовь Мартынова

Свидетельство о регистрации средства массовой информации в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-43310 от 28.12.2010 г.

Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ru

По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в России:
8-800-200-02-01

Телефон «горячей линии» для читателей Москвы:
8-495-660-02-02

АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Россия, 170100, г. Тверь, почтамт, а/я 245,
«Де Агостини», «Занимательные головоломки»

РАСПРОСТРАНЕНИЕ:
ООО «Бурда Дистрибьюшен Сервисиз»

УКРАИНА
ИЗДАТЕЛЬ И УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «Де Агостини Паблишинг», Украина
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 01032, Украина,
г. Киев, ул. Саксаганского, д. 119
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Екатерина Клименко

Свидетельство о государственной регистрации печатного СМИ Министерства юстиции Украины КВ № 17502-6252Р от 01.03.2011

АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини»,
«Занимательные головоломки»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»

Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ua

По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в Украине:
0-800-500-8-40

БЕЛАРУСЬ
ИМПОРТЕР И ДИСТРИБЬЮТОР В РБ: ООО «Росчерк»,
220037, г. Минск, ул. Авангардная, д. 48а, литер 8/к,
тел./факс: +375 17 2-999-260.

Телефон «горячей линии» в Беларуси:
+375 17 279-87-87 (пн-пт, 9.00 — 21.00)

АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ: Республика Беларусь, 220040, г. Минск, а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини», «Занимательные головоломки»

КАЗАХСТАН
РАСПРОСТРАНЕНИЕ: ТОО «КГП «Бурда-Алатау-Пресс»

РЕКОМЕНДУЕМАЯ РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 279 руб.
РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 49,90 грн, 990 тенге

ОТПЕЧАТАНО В ТИПОГРАФИИ: G. Canale & C. S.p.A.
Sos. Cernica 47, Bucuresti, Pantelimon – Ilfov, Romania.

ТИРАЖ: 68 000 экз.

Издатель оставляет за собой право изменять последовательность номеров и их содержание.

Издатель оставляет за собой право увеличить рекомендуемую цену выпусков.

Неотъемлемой частью каждого выпуска является приложение.

ISSN 2225-1782

ДАТА ВЫХОДА В РОССИИ: 12.02.2013

Теория чисел

Диофантовы уравнения и Ферма

Диофантовы уравнения формулируются достаточно просто. Они требуют лишь базовых знаний о том, что такое уравнение, и соответствующих понятий. Диофантовы уравнения описывают множество задач, начиная от ситуаций из повседневной жизни и заканчивая задачами квантовой механики. Впервые они были описаны в «Арифметике» Диофанта. Их решением занимался Ферма, который в ходе работы над одним из таких уравнений сформулировал свою известную теорему — самую знаменитую теорему всех времен.

Уравнения

Уравнение — это математическое равенство с одной или несколькими неизвестными величинами, значение которых нужно найти. Пример:

$$3x + 2y = 8.$$

Это уравнение с двумя неизвестными: x и y. Числа, на которые умножаются неизвестные, называются коэффициентами. Неизвестные могут возводиться в различные степени, наибольшая из которых называется степенью уравнения. Уравнение вида

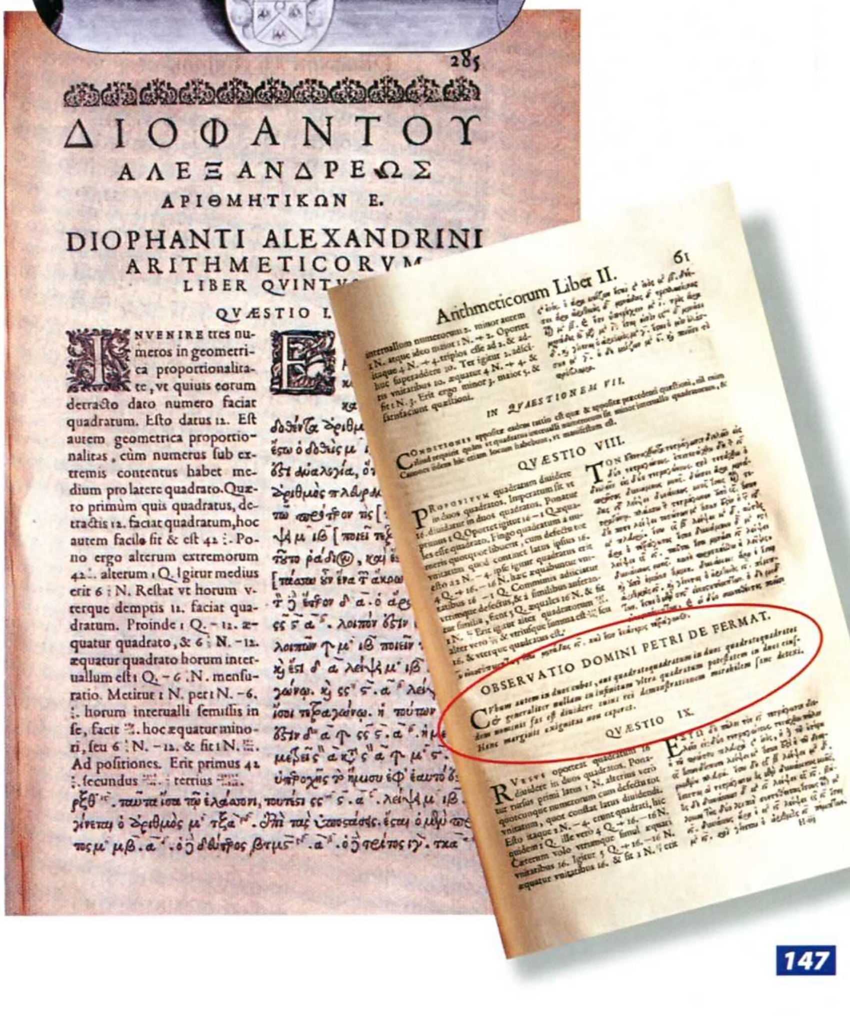
$$x^2y + 3y^3 + 8 = 25$$

является уравнением третьей степени. Уравнения, степень которых равна единице, называются линейными. Уравнение считается решенным, когда найдены значения неизвестных, при которых обе части уравнения равны между собой. Решением уравнения

$$2x + 1 = 9$$

является $x = 4$, так как если вместо x подставить в уравнение число 4, получим $2 \cdot 4 + 1 = 9$. Существует множество типов уравнений: с одной или несколькими неизвестными, первой степени (линейные), второй, третьей степени и так далее. Уравнения, о которых мы поговорим далее, не относятся к какому-либо из этих типов, а их решения обладают особыми свойствами.

◄ Пьер де Ферма (1601—1665). Его гипотеза о диофантовом уравнении $x^n + y^n = z^n$ была названа великой теоремой Ферма — одной из известнейших математических теорем всех времен.



285

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ Ε.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORUM LIBER QUINTUS.

Arithmeticorum Liber II. 61

QVÆSTIO VIII.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

QVÆSTIO IX.

► Пометка на полях «Арифметики» Диофанта, написанная Пьером Ферма и обнаруженная его сыном (обведена красным цветом), много веков не давала покоя лучшим математикам всего мира. Для окончательного доказательства теоремы Ферма потребовалось примерно четыреста лет.

Целые решения

Множество целых чисел, обозначаемое буквой Z, определяется как множество натуральных чисел 1, 2, 3, ..., к которому добавлен ноль и множество отрицательных чисел. Дробные числа, определяемые как результат деления целого числа на натуральное, не являются целыми числами. Так, целыми не являются 1/2, 5/3 и другие дроби. Теория чисел — это раздел математики, изучающий целые числа и, помимо прочего, методы решения диофантовых уравнений.

По определению, диофантово уравнение — это уравнение с одной или несколькими неизвестными с целыми коэффициентами, решения которого — целые числа.

Например, уравнение $3/2x + y = 2$ не является диофантовым, так как коэффициент при x не является целым числом. Уравнение $2x + 3 = 6$ имеет только целые коэффициенты, но не является диофантовым, так как его решение $x = 3/2$ не является целым числом (в этом случае можно говорить о диофантовом уравнении, которое не имеет решений). Многие диофантовы уравнения не имеют решений, некоторые имеют конечное или бесконечное число решений.

Например, решениями диофантова уравнения

$$5x + 7y = 57$$

являются $x = 3 + 7t$; $y = 6 - 5t$, где t — любое целое число. Следовательно, это уравнение имеет бесконечно много решений.

Диофантовы уравнения представляют интерес в зависимости от того, что обозначают их переменные. Если переменная обозначает объем жидкости, то решением уравнения может быть дробное число, но если речь идет, например, о том, сколько человек пришло на собрание, то будут иметь смысл лишь целые решения.

Диофантовы задачи

Как мы уже увидели, диофантовы уравнения используются в задачах, решениями которых обязательно должны быть целые числа. Простейшие диофантовы уравнения, с которыми мы чаще всего сталкиваемся в реальной жизни, можно представить в виде

$$ax \pm by = c.$$

Пусть, например, у нас есть 50 рублей для покупки марок ценой 3 и 5 рублей. Сколько марок каждого типа мы сможем купить? Если мы обозначим количество марок ценой 3 рубля за x, количество марок ценой 5 рублей — за y, то, чтобы узнать ответ задачи, потребуется решить уравнение

$$3x + 5y = 50.$$

Один из возможных способов решения — подставлять в уравнение целые числа, пока не будет найдена подходящая пара решений. Использовать этот способ не рекомендуется, так как подобные уравнения не всегда имеют решение. К счастью, благодаря результатам, полученным Евклидом, можно определить, решаемо ли это уравнение в целых числах. Если коэффициенты уравнения a и b являются взаимно простыми числами, это уравнение всегда будет иметь решение. В противном случае нужно вычислить наибольший общий делитель этих коэффициентов и проверить, делится ли c на это число. Если это так, то решения существуют, в противном случае — нет.

▲ *На этом эскизе картины Сальвадора Дали «50 абстрактных картин, складывающихся на расстоянии 2 метра в три портрета Ленина в виде китайца, а с 6 метров превращающихся в тигра» художник заполняет плоскость мозаикой из правильных многоугольников с произвольным числом сторон, имеющих общие вершины. Это заполнение плоскости равносильно решению диофантова уравнения* $1/x_1 + 1/x_2 + ... + 1/x_n = (n-2)/2$ *при* $x_1 = x_2 = x_3 = 3$, $x_4 = x_5 = 4$ *и* $n = 5$.

▶ *Однажды в III веке до н. э. Архимед послал Эратосфену эпиграмму, в которой просил его определить, сколь велики стада Гелиоса, бога Солнца, и сколько в них быков и коров каждого цвета, указав несколько исходных чисел. Для решения этой задачи нужно решить невероятно сложное диофантово уравнение. Подсчеты показывают, что решением задачи является число 5 916 837 175 686. Эта задача имеет и другие решения, запись наименьшего из которых содержит 206 545 цифр.*

Наибольший общий делитель двух чисел несложно вычислить по алгоритму Евклида. Например, уравнение

$$3x + 6y = 4$$

не имеет решений, поскольку наибольшим общим делителем 3 и 6 является 3, а 4 не делится на 3.

Относительно простой метод решения уравнений этого типа таков. Рассмотрим все тот же пример с почтовыми марками. Выразим одну неизвестную через другую: $3x = 50 - 5y$.

Затем будем присваивать y значения 0, 1, 2 (меньшие, чем коэффициент при x, который равен 3):

$$3x = 50 - 5 \cdot 0 = 50,$$
$$3x = 50 - 5 \cdot 1 = 45,$$
$$3x = 50 - 5 \cdot 2 = 40.$$

Из трех полученных равенств лишь второе позволяет найти целое значение x, так как обе части этого равенства делятся на 3. Таким образом, при $y = 1$ имеем $x = 45/3 = 15$. Следовательно, решениями уравнения являются

$$x = 15 - 5t,$$
$$y = 1 + 3t.$$

Коэффициенты при t получены из исходного уравнения следующим образом:

$$3x + 5y = 50$$

$$x = 15 - 5t \qquad y = 1 + 3t.$$

Присваивая различные значения переменной t, получим решения исходного уравнения. В следующей таблице приведены несколько таких решений:

t	x	y
0	15	1
1	10	4
2	–5	7
3	0	10
4	–5	13

Уравнения этого типа имеют бесконечно много решений — по числу значений параметра t. Так как отрицательное число марок не имеет смысла, то корректными будут лишь следующие решения: $x = 15$, $y = 1$; $x = 10$, $x = 4$; $x = 5$, $y = 7$; $x = 0$, $y = 10$.

▼ *В известной диофантовой задаче авторства Бена Эймса Уильямса на необитаемый остров, где в изобилии росли кокосы, попали пять матросов и мартышка. Весь первый день матросы собирали кокосы, после чего усталые легли спать. Спустя некоторое время один из матросов проснулся и решил забрать свою долю. Он разложил все кокосы на пять кучек и забрал одну кучку себе. Один лишний орех он отдал мартышке. Точно так же поступили и остальные матросы. На следующий день все пятеро матросов проснулись, поделили поровну оставшиеся кокосы и отдали один оставшийся орех мартышке. Сколько кокосов было вначале?*

▲ *Обозначим начальное число кокосов за x; число орехов, полученное каждым матросом при последнем дележе, — за y. Проделав некоторые вычисления, получим диофантово уравнение $1024x - 15625y = 11529$. Решение диофантова уравнения должно быть целым, но не обязательно положительным. Так, $x = -4$, $y = -1$ является решением уравнения. Следуя методу, который объясняется на этой странице, получим решение в общем виде: $x = -4 + 15625t$, $y = -1 + 1024t$. Наименьшим положительным решением будет $x = 15621$, $y = 1023$ кокоса — настоящее пиршество!*

В других случаях все решения могут быть положительными, но некоторые из них не будут иметь смысла в конкретной задаче. Возможно, потребуется как-то ограничить множество решений уравнения. Например, рассмотрим уравнение, описывающее следующую задачу: «Допустим, что у нас есть только купюры в 3 условные единицы, и мы хотим совершить покупку на 19 единиц. Кассир может выдать нам сдачу только купюрами по 5 условных единиц. Можно ли совершить покупку, и если да, то сколько банкнот каждого типа потребуется для этого?»

Условие задачи можно представить так: мы платим x банкнот по 3 условные единицы и получаем сдачу в y банкнот по 5 условных единиц. Итоговое уравнение будет выглядеть так:

$$3x - 5y = 19.$$

Уравнения такого типа решаются примерно таким же способом, о котором мы рассказали выше. Не будем забывать о смене знака:

$$3x = 19 + 5y.$$
$$y = 0, \quad 3x = 19;$$
$$y = 1, \quad 3x = 14;$$
$$y = 2, \quad 3x = 29;$$
$$y = 3, \quad 3x = 34;$$
$$y = 4, \quad 3x = 39.$$

Только в последнем уравнении обе части делятся на 3. Таким образом, при $y = 4$, $x = 13$ решения в общем виде будут представлены так:

$$3x - 5y = 19$$

$$x = 13 + 5t \qquad y = 4 + 3t$$

чему соответствует следующая таблица значений x, y и параметра t:

t	x	y
0	13	4
1	18	7
2	23	10
3	28	13

Эту таблицу можно продолжать бесконечно. Именно поэтому мы указали, что в подобных задачах иногда имеет смысл установить некоторые ограничения, например, указать, что число банкнот в 3 условные единицы не может превышать 20. В этом случае задача будет иметь всего два решения.

Трудные уравнения

Не для всех диофантовых уравнений существует общий метод (алгоритм) решения, подобный тому, о котором мы рассказали выше. Более того, для большинства диофантовых уравнений такого алгоритма не существует. Поиском решений конкретных уравнений долгое время занимались крупнейшие математики — Эйлер и Лагранж, позднее — Минковский и Шевалле. Так, неизвестны методы решения диофантовых уравнений вида

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1x_2x_3,$$

$$x_1^3 + x_2^3 = 7,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = a,$$

$$x_1^3 + x^3 + 2x_3^3 = a,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 30,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - ax_1x_2x_3 = b,$$

$$x_1^4 + x_2^4 + 64 = x_3^4.$$

Общий алгоритм решения диофантовых уравнений до сих пор не найден. В знаменитом списке из 23 проблем, который представил Давид Гильберт на Международном конгрессе математиков в 1900 году, эта задача указана под номером 10. Решение уравнений такого типа интересно не только с чисто математической точки зрения. Так, явления, описываемые квантовой механикой, имеют дискретную природу, поэтому часто требуют решения уравнений в целых числах.

Диофант Александрийский

Диофантовы уравнения названы в честь греческого математика Диофанта Александрийского, о жизни которого практически ничего не известно. Из немногочисленных исторических источников следует, что он жил между 150-м и 350 г. до н. э. Самым известным его трудом является «Арифметика» — собрание 130 задач в 13 книгах, из которых до нашего времени сохранились только шесть. Большинство уравнений, представленных в этой книге, являются линейными или квадратными и имеют положительные рациональные решения. Может показаться странным, что Диофант изучал следующие три типа квадратных уравнений по отдельности:

$$ax^2 + bx = c,$$

$$ax^2 = bx + c,$$

$$ax^2 + c = bx.$$

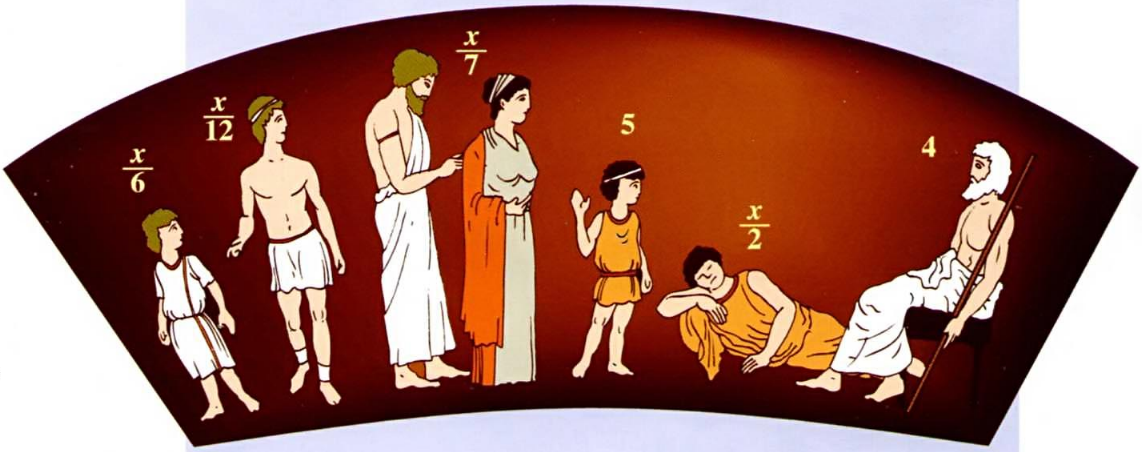
Для нас очевидно, что все они сводятся к одному виду уравнений, но не будем забывать, что во времена Диофанта ноль и отрицательные числа были неизвестны.

Диофант первым ввел обозначения для неизвестных величин и знака равенства, что можно считать началом современной символьной алгебры. Именно поэтому Диофанта часто называют создателем алгебры.

Ему также приписывается авторство других важных работ, а именно «Поризмов» (не сохранилось ни одного экземпляра) и «О многоугольных числах», которая, к счастью, дошла до наших дней. Однако именно «Арифметика» оказала наибольшее влияние на последующее развитие математики. Среди множества переводов этой книги выделяется перевод Баше 1621 года, так как на полях этой книги Пьер Ферма записал свою знаменитую теорему.

Загадка о возрасте Диофанта

«Прах Диофанта гробница покоит; дивись ей и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком.
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругой он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец;
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.

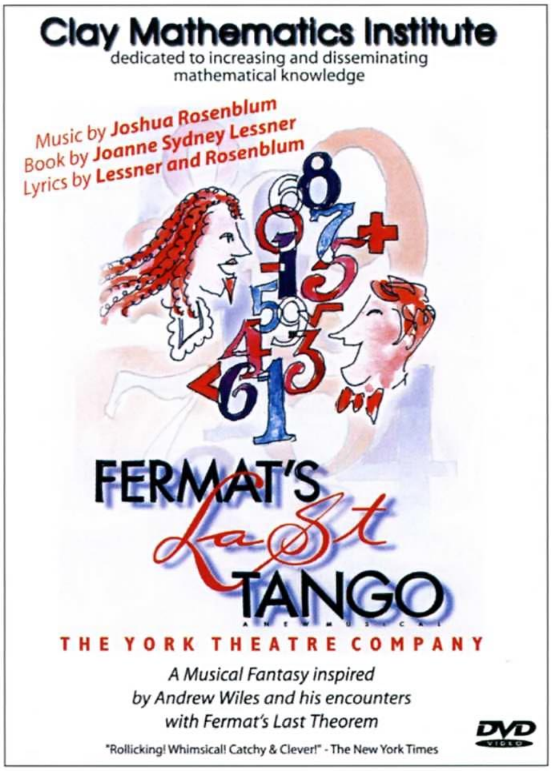


Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,
Тут и увидел предел жизни печальной своей». (Пер. С. Н. Боброва)

Эта эпитафия содержится в греческой антологии, составленной Метродором около 500 г. до н. э., которая представляет собой собрание задач-головоломок. Диофант хотел, чтобы даже рассказ о его жизни и смерти был сделан в виде арифметической задачи. Обозначим за x количество лет, которое прожил Диофант. Затем внимательно прочитаем его эпитафию строчка за строчкой и получим следующее уравнение:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4.$$

Его решением является $x = 84$. Диофант умер в возрасте 84 лет.



◄ *Обложка диска с фильмом «Последнее танго Ферма» — музыкальной комедии, выпущенной Институтом Клэя (Массачусетс, США). В фильме рассказывается история британского математика Эндрю Уайлса, который доказал теорему Ферма.*

Великая теорема Ферма

Диофантовы уравнения вида $x^2 + y^2 = z^2$ являются алгебраическим представлением теоремы Пифагора. Еще в древности были известны таблицы целых чисел, содержавшие решения этого уравнения. Нужно учитывать, что если тройка чисел x, y, z является решением этого уравнения, то решением также будет тройка ax, ay, az, где a — целое число, так как

$$(ax)^2 + (ay)^2 = a^2x^2+a^2y^2 =$$
$$= a^2 (x^2 + y^2) = a^2z^2 = (az)^2.$$

Например, этому уравнению удовлетворяют целые числа 3, 4 и 5:

$$3^2 + 4^2 = 5^2; 9 + 16 = 25.$$

Умножив все три числа на 2, получим тройку 6, 8, 10, которая также удовлетворяет уравнению:

$$36 + 64 = 100.$$

Следовательно, найдя хотя бы одно решение, мы легко сможем получить бесконечное число решений.

Общая формула для получения этих троек, называемых пифагоровыми, такова:

$$x = 2n + 1,$$
$$y = 2n^2 + 2n,$$
$$z = 2n^2 + 2n + 1$$

при $n = 1, 2, 3, \ldots$

Уравнения вида

$$x^3 + y^3 = z^3$$

решаются совершенно иначе. Не стоит терять время, пытаясь найти тройку целых чисел, которые удовлетворяют этому равенству, — таких чисел не существует. Пьер Ферма так сформулировал невозможность решения подобных уравнений в общем виде: «Невозможно разложить куб на два куба, биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, бо́льшую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я нашел этому поистине чудесное доказательство, но поля книги слишком узки для него».

Книга, о которой пишет Ферма, — «Арифметика» Диофанта в переводе Баше. В момент озарения Ферма сформулировал гипотезу о том, что не существует целых положительных решений диофантова уравнения

$$x^n + y^n = z^n$$

для любого n, большего двух ($n > 2$). Со временем гипотеза Ферма стала известна как великая теорема Ферма, хотя это не теорема, а гипотеза.

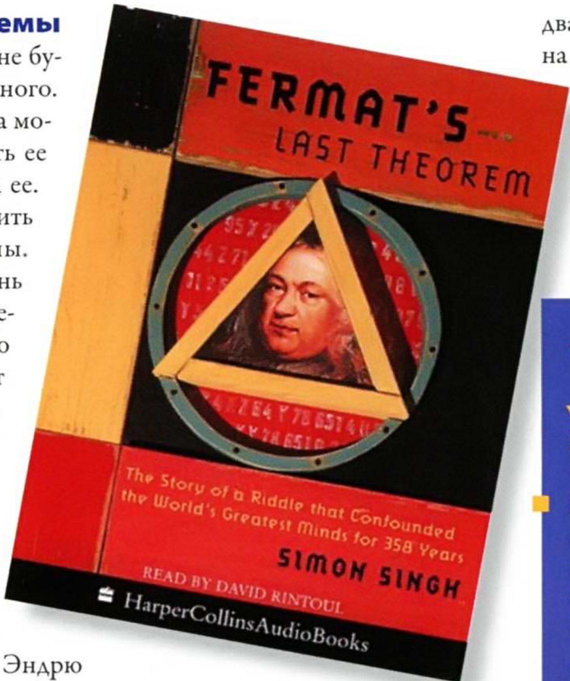
Более трехсот лет многие блестящие математики безуспешно пытались доказать эту теорему — самую знаменитую за всю историю математики. В длинном перечне тех, кто занимался ее доказательством, такие известные математики, как Эйлер (1707—1783), Дирихле (1805—1859), Лежандр (1752—1833), Софи Жермен (1776—1831), Ламе (1795—1870), Куммер (1810—1893) и Герд Фалтингс (р. 1954), который получил Филдсовскую премию 1986 года за работы в этой области.

▲ *Эрнсту Эдуарду Куммеру (1810–1893) принадлежат наиболее важные заключения, ставшие основой окончательного доказательства теоремы Ферма, которое было найдено в 1994 году. В 1847 году он нашел условие, при выполнении которого для простого числа p уравнение $x^p + y^p = z^p$ не имеет натуральных решений.*

► *Среди математиков, внесших важный вклад в доказательство этой знаменитой теоремы, выделяется Герд Фалтингс, который в 1986 году получил Филдсовскую премию за работы в этой области.*

Доказательство теоремы

«Ни одна другая проблема не будет означать для меня так много. Великая теорема Ферма была моей детской мечтой. Заменить ее не сможет ничто. Я доказал ее. Уверен, что попытаюсь решить какие-то другие проблемы. Некоторые из проблем очень трудны, и если мне удастся решить какую-нибудь из них, то это, несомненно, снова даст мне ощущение достижения. Но нет ни одной проблемы в математике, которая могла бы захватить меня так, как захватила Великая теорема Ферма».



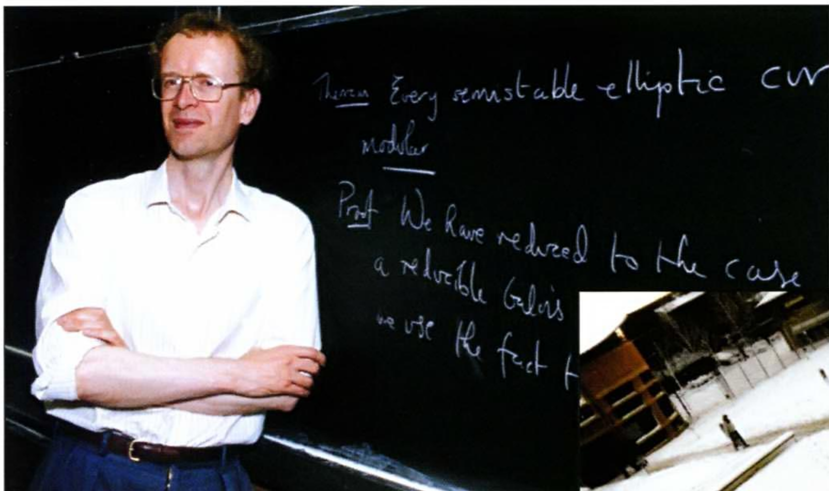
▲ *О великой теореме Ферма написано множество книг. Возможно, самой известной из них является книга Саймона Сингха, где во всех подробностях рассказывается увлекательная история о поисках доказательства этой теоремы.*

Так выразил свои чувства британский математик Эндрю Уайлс, который в октябре 1994 года опубликовал доказательство гипотезы Таниямы — Симуры, совершив последний шаг на пути к доказательству теоремы Ферма. Сама же теорема доказывается приведением к противоречию. Это невероятно сложное доказательство объемом свыше двухсот страниц, содержащее множество ранее полученных результатов, к которым, как к пазлам, Уайлс добавил недостающие части и получил полную картину. Доказательство великой теоремы Ферма получило широкий резонанс в международной прессе. Никогда раньше математическому открытию не уделялось столько внимания.

Так была доказана гипотеза, которую почти четыреста лет назад выдвинул математик-любитель, адвокат по профессии, когда размышлял об уравнениях, сформулированных за семнадцать веков до него греческим математиком Диофантом. Сложность доказательства и применение современных математических инструментов (Уайлс использовал результаты, полученные за последние два столетия, которые были неизвестны во времена Ферма) заставили усомниться в том, что Ферма действительно нашел «чудесное доказательство», которое не поместилось на полях книги. Большинство экспертов сходятся во мнении, что доказательство Ферма было либо ошибочным, либо вовсе никогда не существовало.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Для многих доказательство теоремы Ферма означало конец эпохи, так как был разрушен математический идеал. Теорема Ферма — классическая теорема с очень простой формулировкой, и ожидалось, что ее доказательство также будет классическим. Однако в доказательстве использовались столь сложные приемы, что полностью понять его способны лишь немногие математики.
- Любопытно, что в работе над своим доказательством гипотезы Ферма Уайлс не применял компьютерные программы и даже калькулятор. Он работал в духе чистой математики, использовав лишь бумагу и карандаш.



◄▼ *Математику Эндрю Уайлсу в 1994 году удалось найти окончательное доказательство известнейшей великой теоремы Ферма, после того как первая попытка, предпринятая им же годом ранее, завершилась неудачей. Он представил свое доказательство в здании Кембриджского университета (на иллюстрации), перед которым кто-то написал на снегу формулировку этой знаменитой теоремы.*

Гениальный математик-любитель
Пьер де Ферма

Пьер де Ферма был «тихим человеком», но ему выпало родиться в эпоху, полную политических и религиозных потрясений (он жил в первой половине XVII века). Ферма родился в августе 1601 года (точная дата неизвестна; мы знаем лишь, что его крестили 20-го числа) в небольшом городке Бомон-де-Ломань близ Тулузы. Его отец Доминик Ферма, второй консул Бомонта, был состоятельным торговцем мехами, а мать, Клер де Лонг — дочерью юриста. О первых годах его жизни мы знаем немногое (возможно, первые уроки его прошли в отчем доме), но достоверно известно, что он получил очень хорошее образование: в совершенстве знал классические языки (латынь и древнегреческий) и большинство европейских языков. Он изучал юриспруденцию в Тулузе, где 14 мая 1631 года получил должность члена верховного суда. В июне того же года он женился на двоюродной сестре матери Луизе де Лонг. У них родилось трое детей: Клеман-Самуэль, который позднее опубликовал работы отца, и две дочери, ставшие монахинями. Безупречная карьера Ферма длилась 34 года. Последние 17 лет, начиная с 1648 года, он служил в парламенте Тулузы. Чтобы избежать коррупции, лицам, занимавшим подобную должность, предписывалось воздерживаться от любой общественной деятельности. Благодаря этому у Ферма оставалось много свободного времени, которое он использовал с пользой. В отличие от современников, он был равнодушен к путешествиям. Он совершил лишь одну поездку в Париж где при посредничестве влиятельного французского математика Пьера де Каркави (1600—1684) познакомился с монахом Мареном Мерсенном (1588—1648), который жил в монастыре ордена минимов — в то время это был один из центров европейской науки.

Тихая и безмятежная жизнь Ферма окончилась 12 января 1665 года в Кастре. Он умер в возрасте 65 лет. Его биография не вошла бы в анналы истории, если бы он не был одним из самых выдающихся математиков всех времен.

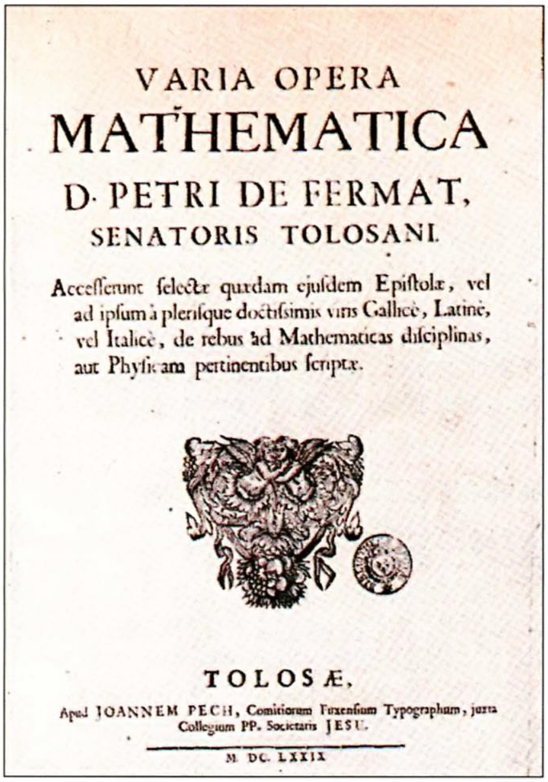
▲ Ферма, который учился у Блеза Паскаля и поддерживал переписку с Рене Декартом, внес огромный вклад в теорию чисел, обогатив ее различными теоремами, но в большинстве случаев не привел их доказательства.

Его труд

При жизни Ферма опубликовал очень мало работ. Большинство из них увидело свет благодаря усилиям его сына Клемана-Самуэля в 1679 году и представляет собой собрание обширной переписки Ферма с другими математиками того времени, в частности с Джоном Валлисом (1616—1703), Блезом Паскалем (1623—1662), с которым он вместе работал над основами теории вероятностей, Жилем Робервалем (1602—1675) и Мерсенном, который создал в своей монастырской келье в Париже настоящий информационный центр, объединивший большинство европейских ученых того времени.

Самая важная работа Ферма посвящена теории чисел. Ферма может по праву считаться ее создателем; именно в этой области он получил множество важнейших результатов, хоть и не привел доказательств для большинства из них. Также он независимо от Рене Декарта сформулировал основы аналитической геометрии и расширил ее для трехмерных пространств, не ограничиваясь геометрией на плоскости. При работе над

▼ По основной профессии Пьер де Ферма был судьей. Эту должность он получил в Тулузе в 1631 году. Ферма занимал государственные посты в течение 34 лет, 17 из которых (начиная с 1648 года) он был советником парламента Тулузы.


VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.

Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptæ.

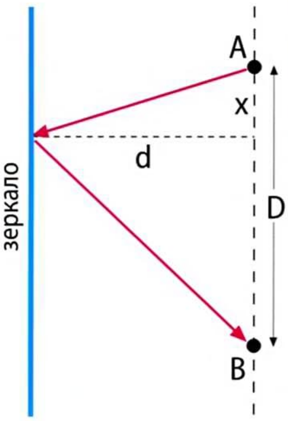
TOLOSÆ,
Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.
M. DC. LXXIX

◀ *На иллюстрации изображена обложка одного из собраний сочинений Ферма. Речь идет о Varia Opera, датируемой 1679 годом и опубликованной спустя 14 лет после смерти Ферма.*

ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Еще одна грань таланта Ферма, о которой известно немногим, — его увлечение поэзией. Он обладал изысканным вкусом и в совершенстве владел иностранными языками, проявив себя и как филолог, заслужив признание специалистов по классическим языкам.

- В мире чисел Ферма чувствовал себя совершенно свободно и естественно. Подобно садовнику, который, неспешно прохаживаясь по саду, находит всё новые и новые цветы, Ферма выдвигал гипотезы вроде «всякое простое число вида 4n + 1 является суммой двух квадратов». Он не привел доказательства этой теоремы; это сделал Эйлер в 1749 году, на что ему потребовалось семь лет работы. Гаусс считал эту гипотезу самой красивой из всех гипотез Ферма в теории чисел.



▲ *В 1650 году Ферма сформулировал принцип, из которого следуют законы отражения и преломления света. Согласно этому принципу путь луча из точки A в точку B (выделен на схеме красным цветом), расстояние между которыми равно D, при отражении света от зеркала, расположенного на расстоянии d от обеих точек, таков, что время движения будет наименьшим.*

этой темой между математиками возник ожесточенный спор о построении касательных к кривой. Ферма поправил Декарта, из-за чего тот посчитал Ферма фанфароном и заявил: «Господин Ферма гасконец, я — нет». Ферма по обыкновению держался скромно, и время доказало его правоту.

Стоит отметить, что Ферма также был одним из создателей дифференциального исчисления: в 1934 году было найдено письмо, где Исаак Ньютон подробно цитирует его работу и указывает, что метод построения касательных, созданный Ферма, навел его на мысли о создании дифференциального исчисления.

Большинство открытий Ферма изложил в кратких заметках, письмах или примечаниях на полях книг. Среди немногочисленных работ, опубликованных Ферма при жизни, стоит выделить следующие: «Введение к теории плоских и пространственных мест», в которой он изложил основы аналитической геометрии, и «О максимумах и минимумах», где, помимо прочего, доказывается так называемый принцип Ферма, который гласит: «Луч света движется по пути, где время движения минимально».

Секрет Ферма

Ферма был математиком-любителем и занимался главным образом арифметикой. Его работы, подобно книгам Диофанта, кажутся простыми, но в них изложены фундаментальные результаты в чистой математике, которые ему подсказала его гениальная интуиция. Большинство его рассуждений настолько просты, что их поймет даже старшеклассник. Ферма имел привычку записывать свои мысли и результаты логических рассуждений на полях книг. Некоторые из них, подобно знаменитой великой теореме Ферма, согласно которой уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет натуральных решений для n, больших 2, удалось доказать лишь с помощью современных математических методов. Так родилась легенда о том, что Ферма знал какой-то очень простой способ решения задач определенного типа. По словам историка Либри, «Ферма знал то, что нам неизвестно, и чтобы узнать это, он использовал более совершенные методы, чем изобретенные впоследствии». С другой стороны, Ферма не скрывал своих знаний в отличие от множества других математиков, которые, боясь, что другие отберут у них авторство, умышленно излагали свои идеи неясным и запутанным языком. Таинственный метод Ферма по-прежнему дает поводы для различных спекуляций, но, похоже, он так никогда и не будет найден.

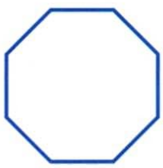
▶ *Марка, выпущенная в Чехии в память о Пьере де Ферма и его великой теореме и в честь Эндрю Уайлса, которому удалось доказать теорему Ферма в 1994 году, подведя итог многовековым трудам многих математиков.*

Сферы, цилиндры, пирамиды, кубы, параллелепипеды... Эти геометрические тела стали частью нашей культуры, и их выбор не случаен: и люди, и сама природа всегда используют наиболее подходящие формы.

Многогранники
«Объемные многоугольники»

В некотором роде многогранники можно считать разновидностью многоугольников, которые расположены не на плоскости, а в пространстве. Многоугольник — это всего лишь часть плоскости, ограниченная отрезками. Многоугольники называются правильными, если все ограничивающие их отрезки, а также углы между этими отрезками, равны между собой.

Например, следующая фигура является неправильным многоугольником. Напротив, фигура, изображенная на рисунке ниже — это правильный многоугольник с 8 сторонами (восьмиугольник). Еще одним критерием классификации многоугольников является выпуклость. Многоугольник называется выпуклым, если для любых двух точек многоугольника соединяющий их отрезок полностью лежит в нем. Очевидно, что многоугольник на рисунке выше — выпуклый. Многоугольник, изображенный слева, является правильным, но, несмотря на это, не является выпуклым.



Все приведенные здесь понятия можно легко обобщить для трех измерений. Многогранник — это часть пространства, ограниченная многоугольниками. Многогранник называется правильным, если все его грани являются правильными многоугольниками и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер. Определение выпуклости многогранника дается аналогично. Можно дать другое, эквивалентное определение, согласно которому многогранник является выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой из его граней.

Правильность

Возможно, «правильный» — не совсем подходящее определение для подобных фигур, так как существуют многоугольники и многогранники, которые считаются правильными с обыденной точки зрения, но не являются таковыми с точки зрения математики. Их можно было бы назвать «одинаковыми со всех сторон», так как они обладают различными видами симметрии. Например, во всех вершинах правильного многоугольника или многогранника расположение ребер одинаково. Если мы рассмотрим шестиугольник, то увидим, что в каждой его вершине сходятся два ребра под углом 60°. В каждой вершине додекаэдра сходятся три равных правильных пятиугольника. Подобной симметрией не обладает, например, четырехугольная пирамида, так как в ее вершине сходятся четыре треугольника, а в любой вершине при основании сходится квадрат и два треугольника. Но за эту «правильность», которой обладают некоторые многоугольники и многогранники, приходится платить. Пространственная геометрия накладывает серьезные ограничения. Так, существуют правильные многоугольники с 3, 4, 5 и 6 сторонами. Первые правильные многоугольники носят особые названия — треугольник и квадрат, все последующие правильные многоугольники называются по числу их сторон — пятиугольник, шестиугольник и так далее, потому что правильных многоугольников бесконечно много. Если мы захотим построить правильный многоугольник с 12 000 сторонами, нужно будет выполнить лишь одно условие: все его стороны должны быть равны между собой. В этом смысле двумерное

▲ *Лука Пачоли (1445—1514), автор энциклопедии, в которой собраны все математические знания того времени, изображен на этой картине Якопо де Барбари в окружении геометрических тел, среди которых выделяется сверкающий многогранник.*

▼ *В своей знаменитой картине «Тайная вечеря» (1955) гениальный художник Сальвадор Дали расположил Иисуса Христа и апостолов внутри додекаэдра, который в философии Платона является образцом всего сущего.*

пространство, в котором мы строим такие многоугольники, не накладывает существенных ограничений. При переходе от плоскости к пространству происходят значительные изменения. В трехмерном пространстве существует всего пять правильных многогранников.

Платоновы тела

В трехмерном пространстве существует всего пять выпуклых правильных многогранников: тетраэдр, образованный четырьмя равносторонними треугольниками, гексаэдр (куб), образованный шестью квадратами, октаэдр, образованный восьмью равносторонними треугольниками (он представляет собой два тетраэдра, соединенных основаниями), додекаэдр, образованный двенадцатью пятиугольниками, и икосаэдр, который имеет 20 треугольных граней. Все эти многогранники обладают важными свойствами симметрии. Например, любой из них можно вписать в сферу так, что все его вершины будут касаться сферы. Также можно вписать сферу в многогранник так, что она будет касаться всех его граней.

Как известно из исторических источников, ученикам Пифагора были известны лишь тетраэдр, гексаэдр и додекаэдр. Октаэдр и икосаэдр были открыты Теэтетом (417—369 гг. до н. э.), который первым провел строгое исследование всех пяти правильных многогранников. Эти многогранники называются платоновыми телами, так как именно Платон в одном из своих «Диалогов» (под названием «Тимей») установил соответствие между четырьмя правильными многогранниками и четырьмя стихиями — землей, водой, огнем и воздухом, отведя пятому многограннику, додекаэдру, роль философского камня богов.

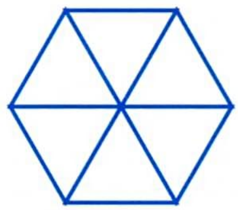
▲ *На рисунке изображен портрет Платона из старинной арабской рукописи. Именно Платон установил связь между правильными многогранниками и элементами вселенной: землей, огнем, водой и воздухом.*

Евклид первым классифицировал правильные многогранники, применив теорему, которая приводится в конце книги XIII его «Начал», и следующую формулу:

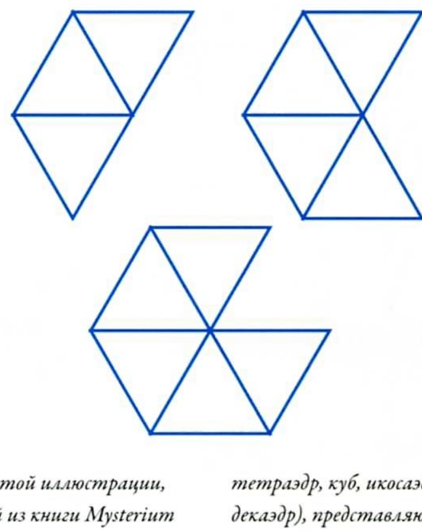
$$m = \frac{180^\circ (n - 2)}{n} < 360^\circ$$

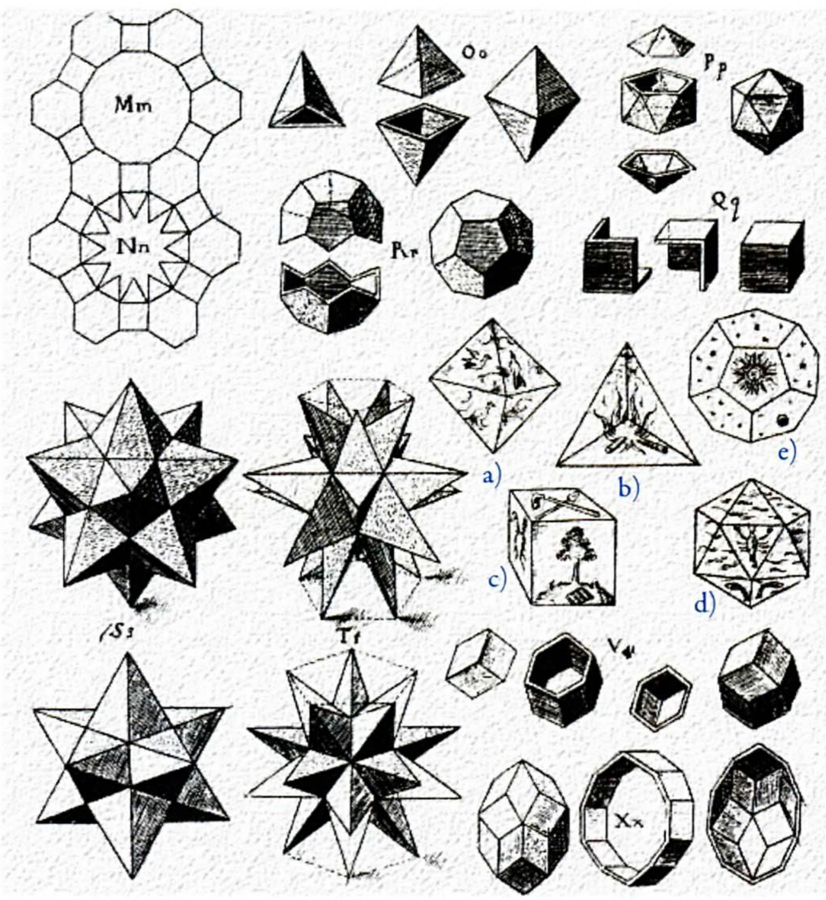
Ножницы и бумага

Можно наглядно убедиться, что правильные многогранники строятся довольно просто, если попробовать вырезать из бумаги правильные многоугольники и склеить их между собой. Нужно учитывать, что, когда мы изображаем вершину на плоскости, нужно оставлять место для складывания и склеивания (это нельзя изобразить на рисунках ниже). Также следует помнить, что в одной вершине должны сходиться минимум три правильных многоугольника. Если их будет всего два, то получится фигура, по форме напоминающая открытую книгу.



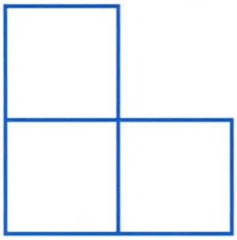
Начнем с равносторонних треугольников. Можно расположить рядом 3, 4 или 5 треугольников.



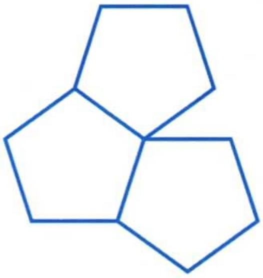


◀ *На этой иллюстрации, взятой из книги Mysterium Cosmographicum («Тайна мира») Иоганна Кеплера, изображены правильные многогранники (октаэдр, тетраэдр, куб, икосаэдр и додекаэдр), представляющие четыре элемента вселенной: воздух (a), огонь (b), землю (c), воду (d) и квинтэссенцию — пятый элемент (e).*

Эти развертки соответствуют тетраэдру, октаэдру и икосаэдру. Если мы рассмотрим квадраты, то станет очевидно, что три квадрата образуют часть развертки вокруг одной вершины куба, и что получить другие фигуры невозможно: четыре квадрата целиком заполнят пространство вокруг вершины, и их нельзя будет сложить так, чтобы получился многогранник.

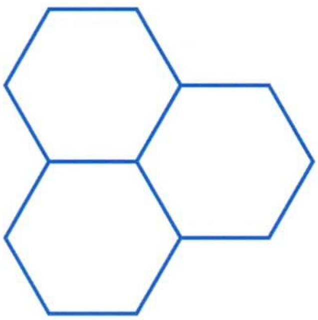


Это же произойдет и в случае с пятиугольниками:

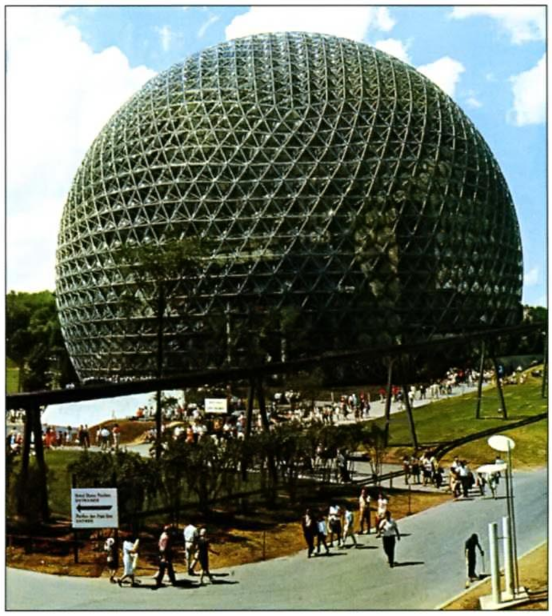


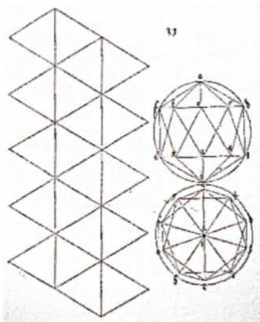
Единственно возможное расположение соответствует додекаэдру.

Таким образом, мы построили все пять возможных правильных многогранников, пять платоновых тел. Если мы попробуем использовать многоугольники с бо́льшим числом сторон, то они будут целиком заполнять пространство вокруг вершины, и сложить фигуру будет невозможно, что нетрудно видеть на примере трех шестиугольников:



▶ *Геодезический купол павильона в США, построенный к Всемирной выставке 1967 года, прошедшей в канадском городе Монреаль. Геодезические купола, придуманные Бакминстером Фуллером, состоят из множества многоугольных модулей, соединенных между собой.*



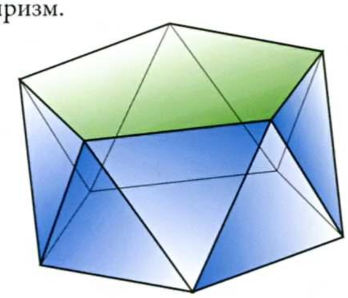


▲ *Немецкий художник Альбрехт Дюрер (1471—1528) внес важный вклад в изучение многогранников, изложив свои идеи в книге «Правила измерения линий, плоскостей и целых тел при помощи циркуля и угольника» (1552), в которой приводится интересное обсуждение перспективы и других техник. В этой книге изложены представления о многогранниках, которые привлекли внимание художников эпохи Возрождения.*

Другие многогранники

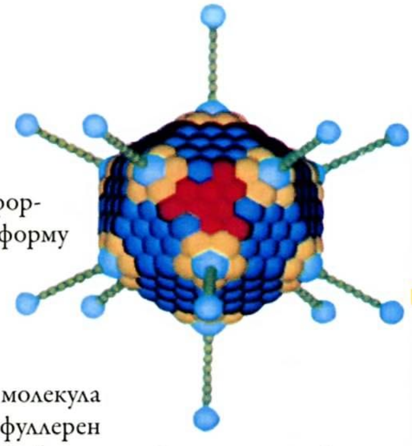
Если мы будем строить по этому же принципу правильные многогранники, которые не будут выпуклыми, то получим четыре новых многогранника. Первые два образуются соединением пентаграмм — пятиугольных звезд, получаемых продолжением сторон прямоугольника до их пересечения. Кеплер открыл малый звездчатый додекаэдр, в каждой вершине которого сходятся пять пентаграмм, и большой звездчатый додекаэдр, в каждой вершине которого сходятся три пентаграммы. В 1809 году Луи Пуансо открыл еще два правильных невыпуклых многогранника — большой додекаэдр и большой икосаэдр (состоящий из 20 треугольников, пересекающихся между собой). Если срезать углы многогранников, получатся новые многогранники. Если разрезать платоновы тела так, чтобы линии разреза проходили через середины ребер, получатся два многогранника — кубооктаэдр и икосододекаэдр. Если линии разреза будут делить ребра на три равных части, получатся усеченные многогранники; их всего семь. Такие многогранники называются архимедовыми телами.

Если соединить ребрами соответствующие вершины двух равных многоугольников, то получится призма (антипризма, если вершины соединяются равносторонними треугольниками). Существует бесконечное множество призм и антипризм.



Природа изобилует примерами самопроизвольного формирования многогранников: например, молекулы силикатов выстраиваются в форме тетраэдров и октаэдров. Форму правильных многоугольников имеют и пчелиные соты — благодаря этому в них сохраняется максимальное количество меда при минимальных расходах воска.

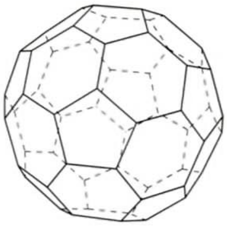
Именно поэтому соты имеют форму шестиугольных призм. Аденовирусы, например вирус полиомиелита, имеют форму икосаэдров. Клетки эпителия имеют форму кубов и призм.



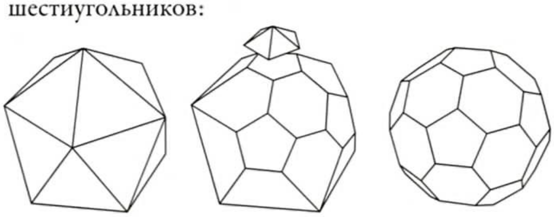
▲ *Компьютерное изображение аденовируса, на котором видно, что вирус имеет форму икосаэдра — одного из пяти платоновых тел.*

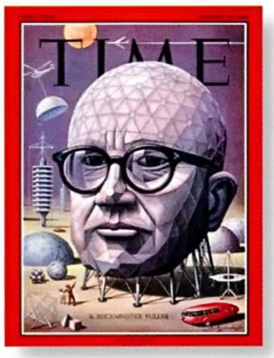
Многогранники в природе

Возможно, самым удивительным примером многогранника в природе является молекула углерода C60 под названием бакминстерфуллерен (ее открытие принесло троим ученым Нобелевскую премию 1996 года по химии). Это химическая структура, образованная 60 атомами углерода, расположенных полностью симметрично в форме фигуры, напоминающей футбольный мяч.



Исходной фигурой для построения этого многогранника является икосаэдр (напомним, что он образован 20 равносторонними треугольниками). Нужно срезать его вершины так, чтобы получился усеченный икосаэдр, гранями которого являются 12 правильных пятиугольников и 20 правильных шестиугольников:





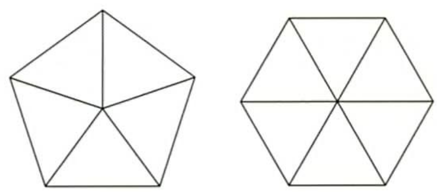
▲ *Ричард Бакминстер Фуллер, создатель геодезических куполов, удостоился чести быть помещенным на обложку американского журнала Time.*

Это интересно

- По-видимому, обширные знания о правильных многогранниках передались Пифагору по наследству. Его отец занимался огранкой драгоценных камней, поэтому Пифагор познакомился с различными геометрическими фигурами еще в юном возрасте.
- Современные мячи уже не имеют форму усеченного икосаэдра, гранями которого являются 12 пятиугольников и 20 шестиугольников. Используется малый ромбоикосододекаэдр, образуемый 20 треугольниками, 30 квадратами и 12 пятиугольниками. Такой мяч имеет более круглую форму, чем его предшественник: его объем составляет 94% от объема описанной вокруг него сферы.

Представьте структуру, образованную шестиугольниками, которые перемежаются пятиугольниками (именно такую форму имеет футбольный мяч).

Сложное название этой молекулы происходит от имени знаменитого архитектора Бакминстера Фуллера — изобретателя так называемых геодезических куполов. Геодезические купола представляют собой решетку, образуемую треугольными поверхностями. Она получается из усеченного икосаэдра разделением каждой пятиугольной грани на пять равносторонних треугольников, каждой шестиугольной грани — на шесть равносторонних треугольников:



Каждый из полученных треугольников можно снова разделить на три равных треугольника. Таким образом получается геодезический купол. Подобное деление можно производить бесконечно — какого-либо теоретического предела не существует. Чем больше фигур будут образовывать купол, тем ближе он будет по форме к полусфере. Такая конструкция обладает множеством преимуществ: на постройку расходуется существенно меньше материалов, она устойчива к непогоде и лучше сохраняет тепло. Неудивительно, если в недалеком будущем здания в больших городах будут иметь именно такую форму.

Как кристаллизуются некоторые известные минералы?

Кристаллизация — это процесс, происходящий при определенной температуре, давлении и концентрации вещества. Атомы химических соединений минерала в этом процессе выстраиваются в кристаллическую структуру определенной формы.

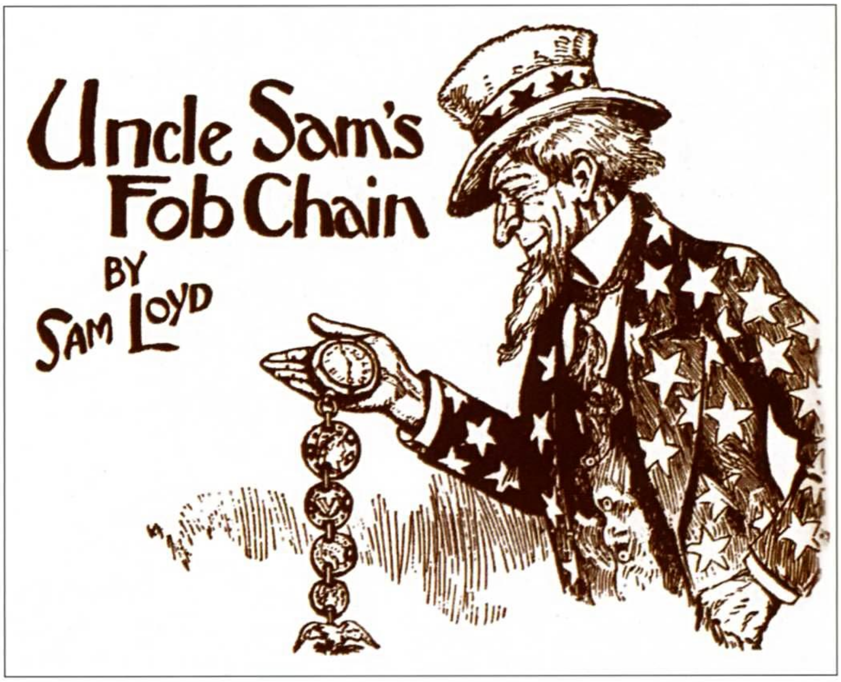
Минерал	Форма при кристаллизации:
Галенит, каменная соль, платина и алмаз	Гексаэдр
Флюорит, магнетит, золото и медь	Октаэдр
Киноварь, кальцит и висмут	Ромбоэдр
Пирит	Додекаэдр
Сера	Четырехугольная призма
Лазурит	Ромбододекаэдр

Арифметические и алгебраические задачи

1. Цепочка для часов дяди Сэма

На днях мне показали любопытную цепочку для часов, сделанную, по старому обычаю, из монет. Эта цепочка состояла из четырех соединенных между собой монет и фигурки орла. В монетах, как показано на рисунке, было проделано пять, четыре, три и два отверстия соответственно, так, что соединяющие их звенья могли располагаться различными способами.

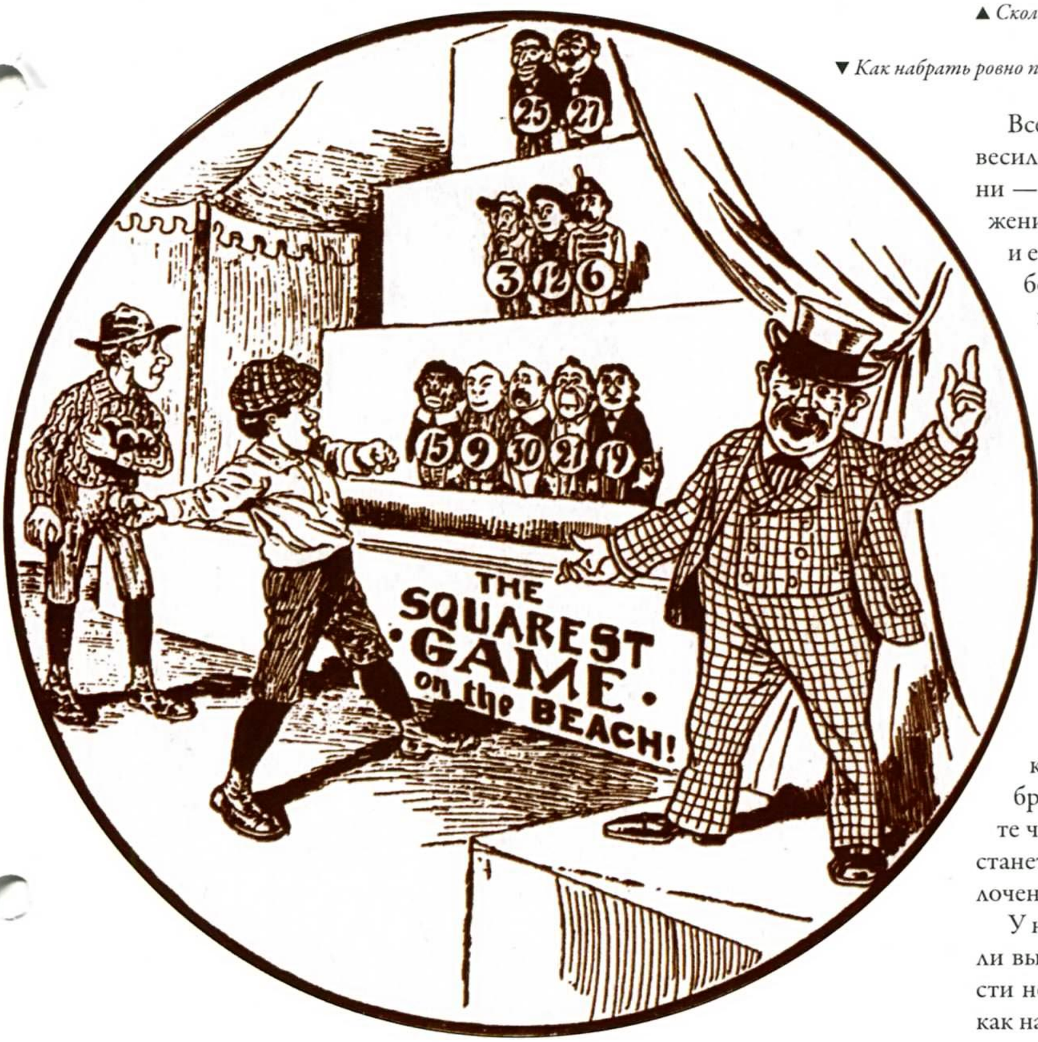
Эта особенность породила спор о возможном числе вариантов, которыми можно расположить четыре монеты и фигурку орла на цепочке. Как вы считаете, сколько таких вариантов?



▲ *Сколько разных цепочек можно составить из пяти звеньев?*

2. Три невесты

Один старый скупец, чтобы привлечь потенциальных женихов для трех своих дочерей, объявил, что даст каждой в приданое столько золота, сколько она весит. Все свадьбы сыграли в одни день, и перед взвешиванием невесты съели по огромному торту, что немало обрадовало их женихов.



▼ *Как набрать ровно пятьдесят очков?*

Все невесты вместе весили 396 фунтов, Нелли весила на 10 фунтов больше, чем Китти, а Минни — на 10 фунтов больше, чем Нелли. Один из женихов, Джон Браун, весил столько же, сколько и его невеста, Уильям Джонс — в полтора раза больше своей невесты, а Чарльз Робинсон — в два раза больше, чем его невеста. Все женихи и невесты в сумме весили 1000 фунтов. Какие фамилии будут носить девушки после замужества?

3. Самая справедливая игра на пляже

На днях я с другом совершал прогулку по Кони-Айленду, и мы увидели павильон, где, как утверждал его владелец, находилась самая справедливая игра на пляже. Нужно было сбить десять кукол бейсбольным мячом. Владелец аттракциона сказал: «Бросайте столько раз, сколько захотите, каждый бросок стоит один цент, бросать можно с любого расстояния. Сложите числа на сбитых куклах, и, как только сумма станет равной 50, вы выигрываете сигару с позолоченным кольцом ценой в 25 центов».

У нас закончились деньги, но мы так и не смогли выиграть. Мы заметили, что никто поблизости не курил призовых сигар. Сможете сказать, как набрать ровно 50 очков в этой игре?

4. Множество морских змей

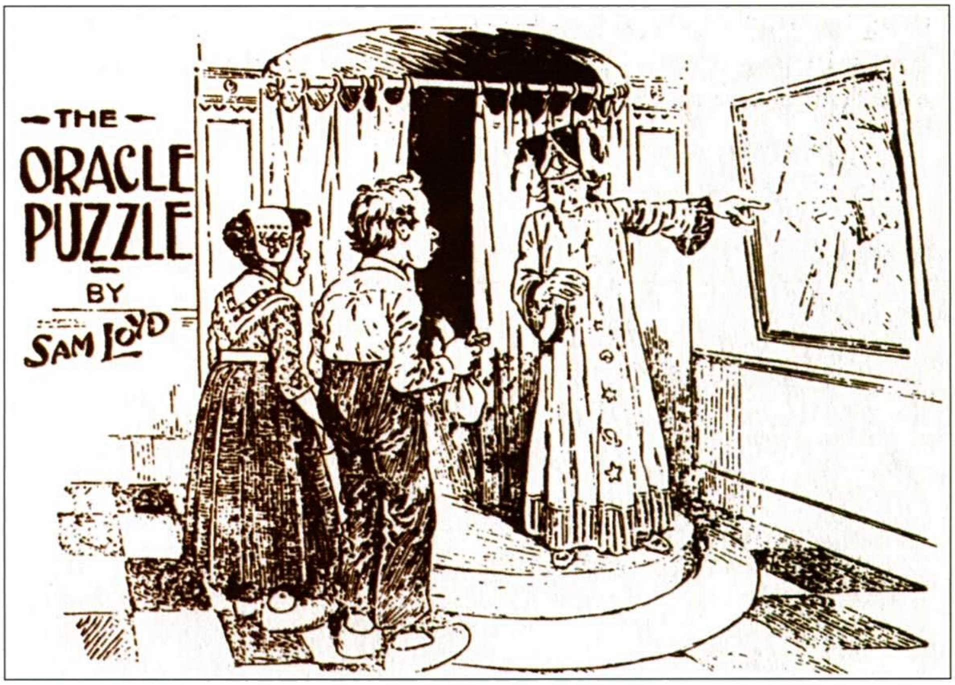
В этом году морских змей расплодилось как никогда много, и на морских курортах стали замечать змей, которые там раньше не водились. Моряки рассказывали страшные истории, которые были весьма оригинальны, несмотря на старинный сюжет.

С изобретением фотографии, однако, рассказы старых моряков и судовые журналы, подлинность которых была подтверждена, перестали удовлетворять публику, которая требовала подлинных кадров.

Один капитан утверждал, что, пока его корабль лежал в дрейфе близ Кони-Айленда, его окружило множество морских змей, и большинство из них были слепыми.

«Три змеи ничего не видели по правому борту, — рассказывал он, — три ничего не видели по левому борту. Три змеи были зрячими на правый глаз, три — на левый, еще три были зрячими на оба глаза, а еще три были полностью слепы». Поэтому он записал в судовом журнале, что «видел восемнадцать змей».

Однако парочке фотолюбителей удалось заснять этих чудовищ. Когда были проявлены негативы, оказалось, что капитан существенно ошибся. С помощью фотографий удалось точно определить, сколько змей было на самом деле. Сколько же змей видел капитан?



▲ *Каким будет число коз и овец?*

5. Головоломка оракула

Древние греки, римляне и египтяне безоговорочно верили оракулам — всё, начиная от объявления войны и заканчивая продажей скота, требовало совета и одобрения оракула. На известной картине «Зевс в Додоне» изображены два крестьянина, которые просят у оракула совета по какому-то незначительному вопросу, и тот властным жестом повелевает им посмотреть в зеркало. Чтобы показать важность и достоинство оракула, либо, что более вероятно, передать загадочность, которой он окружал любые мелочи, на рисунке изображены двое крестьян, которые хотят узнать, благословит ли великий Зевс доброй улыбкой покупку козы и барашка.

Оракул сказал: «Они будут размножаться, пока число овец, умноженное на число коз, не станет равным числу, которое, отраженное в священном зеркале, окажется равным общему числу коз и овец в стаде».

Слова оракула неоднозначны и загадочны, но тем не менее читатель сможет разгадать его загадку.

Решения

1. Математики и любители головоломок, которым доставляет удовольствие решение задач с перестановками, подсчитали, что можно составить 92 160 разных цепочек из четырех монет и подвески в форме орла. Очевидно, что большую монету можно подвесить за любое из пяти отверстий, и повернуть одной из двух сторон. Следовательно, всего допустимо 10 вариантов. Вторую монету можно расположить 8 способами, поэтому только из двух этих монет можно составить 80 различных сочетаний. Если умножить это число на 6 возможных положений третьей монеты, 4 варианта для последней монеты и 2 варианта, которыми можно расположить фигурку орла, получим, что если располагать все монеты именно в таком порядке, то общее число вариантов будет равно 3840. Так как число перестановок монет равно 24, то ответом к задаче будет 3 840 вариантов, умноженные на 24, то есть 92 160.

2. После замужества невесты будут носить фамилии Китти Браун, Нелли Джонс и Минни Робинсон. Китти весила 122 фунта, Нелли — 132, Минни — 142.

3. 50 очков можно набрать, если сбить куклы за 25, 6 и 19 очков.

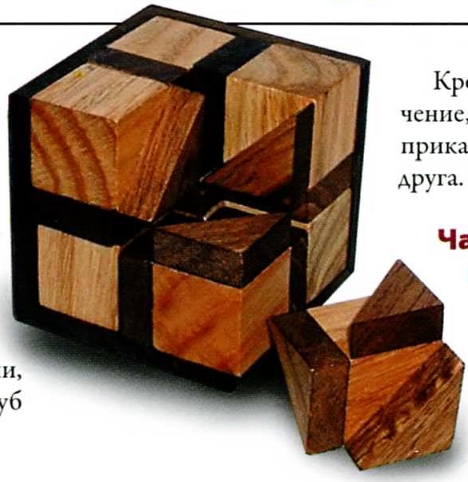
4. Всего было три полностью слепые и три полностью зрячие змеи.

5. Многие крестьяне, подобно нашим читателям, провели немало времени перед зеркалом, перебирая различные варианты, пока не нашли верный ответ: 9 овец и 9 коз. Произведение этих чисел, 81, отраженное в зеркале, даст 18 — общую численность стада.

• • •

Дьявольский куб — увлекательная головоломка, в которой нужно правильно расположить все восемь частей так, чтобы совместить сторонами треугольные призмы на соприкасающихся гранях и собрать большой куб.

Соединяем части в правильном порядке
Дьявольский куб



Дьявольский куб — это увлекательная трехмерная головоломка из восьми частей, которую можно сравнить с кубом Конвея, кубиками сома и другими головоломками с поликубами. Цель всех этих головоломок одинакова — совместить части так, чтобы восстановить исходное расположение. Элементы головоломки не сцеплены так, как в головоломке бурр. Их нужно всего лишь приложить гранями друг к другу. По классификации, предложенной Дж. Слокумом, дьявольский куб относится к разборным головоломкам.

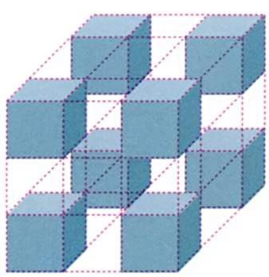
Описание

На некоторых гранях каждого из восьми кубиков этой головоломки находятся треугольные призмы размером в половину этой грани. Каждую из них при сборке головоломки нужно совместить с треугольной призмой на грани другого кубика. Боковые грани этих призм образуют горизонтальные и вертикальные полоски на гранях большого куба. Так как все эти призмы равны между собой, можно предположить, что собрать головоломку очень просто, но это совсем не так. Она лишь кажется простой, так как имеет одну особенность, которая существенно осложняет поиск решения.

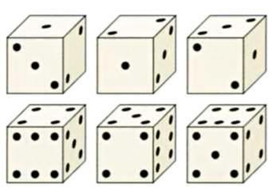
Множество комбинаций

Число возможных вариантов расположения кубиков, из которых состоит головоломка, неизмеримо. Головоломка интересна тем, что расположение составных частей должно удовлетворять определенным условиям.

Изначально каждый кубик может располагаться в одной из восьми возможных позиций. Каждый кубик также может находиться в одном из 24 возможных положений в пространстве, так как в каждой из шести позиций, показанных на рисунке на примере игральных костей, кубик можно повернуть четырьмя разными способами.



Если внимательно изучить элементы дьявольского куба, становится понятно, что каждый кубик имеет три гладкие грани и три грани с выступающими треугольными призмами. При сборке головоломки гладкие грани кубиков должны располагаться снаружи, грани с призмами — внутри. С учетом подобных ограничений число возможных положений кубика в конкретной позиции сокращается с 24 до трех.

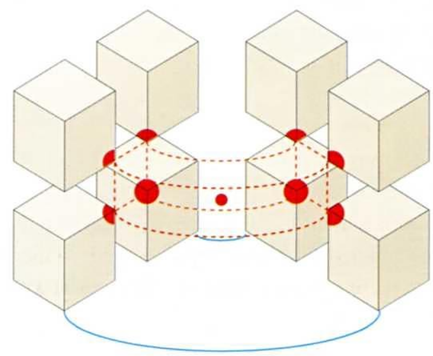


▲ *Головоломка «Дьявольский куб», изображенная на рисунке, подарит вам несколько увлекательных часов. Чтобы собрать ее, потребуется немало терпения.*

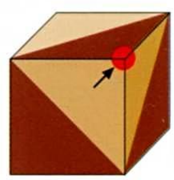
Кроме того, существует еще одно ограничение, вызванное положением призм на соприкасающихся гранях друг относительно друга. Об этом подробно рассказано ниже.

Части головоломки и логика их расположения

Чтобы решить головоломку, нужно правильно определить положение восьми кубиков друг относительно друга. Нужно понять, каковы возможные варианты расположения сторон и соединения. Для этого будет полезно ввести систему обозначений. Будем считать, что все восемь кубиков собранной головоломки имеют одну общую точку, которая находится в центре большого куба. В этой точке расположены вершины маленьких кубиков, отмеченные красным цветом на рисунке:



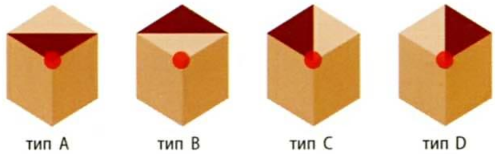
Таким образом, одна вершина в каждом из восьми кубиков окажется помеченной. В нашей головоломке помеченными вершинами можно считать те, в которых сходятся грани с треугольными призмами. На рисунке показан один из элементов головоломки, повернутый так, что вы можете видеть все три его стороны с призмами. Нужная вершина помечена красным цветом.



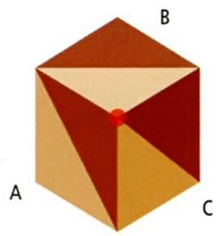
Соединение граней

Сложность головоломки связана с тем, что грани ее составных частей соприкасаются между собой по-особому. Все грани по отдельности кажутся одинаковыми: половину каждой грани занимает треугольная призма.

Если проанализировать их положение внутри большого куба, то станет понятно, что они отличаются. Учитывая расположение помеченной вершины (выделенной красным цветом), можно выделить четыре типа граней в зависимости от того, какую часть грани занимает призма.

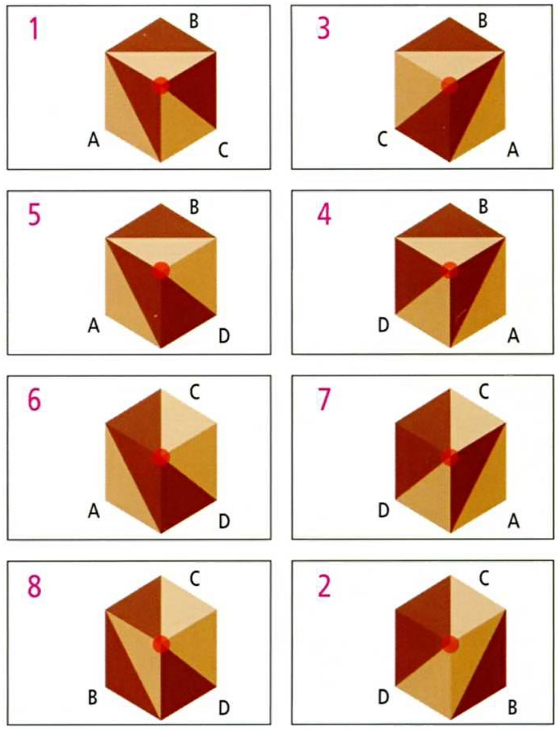


На рисунке справа показан кубик с гранями типа A, B и C.

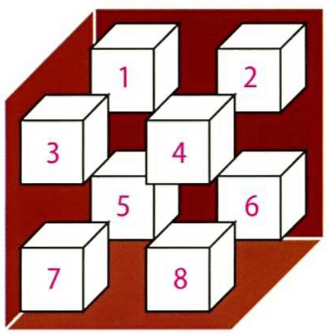


Все возможные части и комбинации

Всего существует четыре типа граней с треугольной призмой: A, B, C и D. Кроме того, призмы находятся на трех гранях каждого кубика. Единственно возможные сочетания четырех элементов по три таковы: ABC, ABD, ACD, BCD. Так как кубики симметричны относительно центральной точки большого куба (см. рисунок), каждое из этих сочетаний можно сформировать двумя разными способами. Так получаются восемь частей дьявольского куба: на рисунке показаны все части головоломки и нумерация, которая используется в решении.



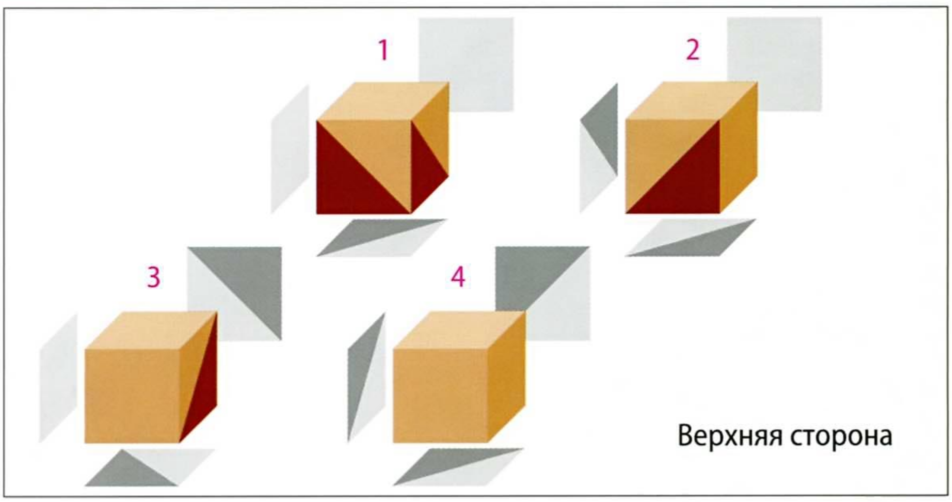
Решение

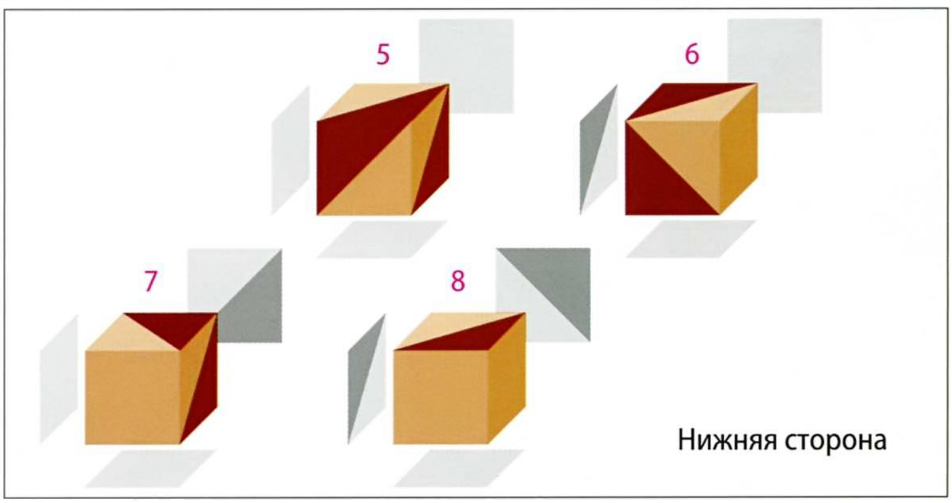


Чтобы решить головоломку, нужно расположить ее части так, как показано на рисунке в верхней части страницы, при необходимости повернув их, после чего совместить так, как показано на схеме. Сначала поместите элемент № 5 в угол коробки, затем расположите элементы 6, 7 и 8, как показано на рисунке. Нижняя сторона головоломки собрана.

Теперь установите в нужное место элемент № 1, затем 2, 3 и 4.

Рисунок справа поможет понять, как нужно расположить кубики друг относительно друга (внутренние грани выделены серым цветом).





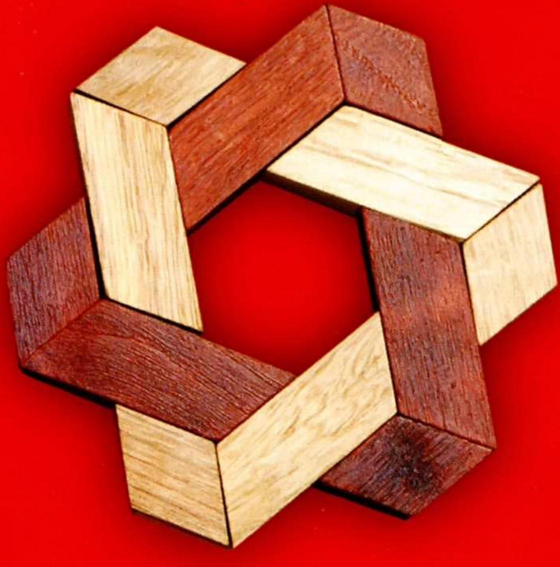

18
17
3
11
8
7
19
9
6
5
4
16
14
1
2
12
15
10
13

Пропустили выпуск любимой коллекции?

Просто закажите его на сайте www.deagostini.ru

Для украинских читателей — по телефону горячей линии 0-800-500-8-40

В следующем выпуске через 2 недели



«Большой взрыв»

Алгоритмы

Мощный математический инструмент

Великий арабский математик

Аль-Хорезми

Теория информации

Эпоха коммуникаций

Генри Э. Дьюдени

Задачи на разрезание

Спрашивайте в киосках!

16+